日産科学振興財団研究報告書, 14 (1991)

分布定数系に対する適応制御系の構成とその応用

Construction of adaptive control system for a distributed-parameter system and its applications

研 究 者　高松工業高等専門学校講師　山 本 　透
Lecturer, Takamatsu National College of Technology
Toru YAMAMOTO

In this research, we extend the self-tuning controller, which has so far been applied only to lumped-parameter systems, to distributed-parameter systems. The self-tuning controller was originally proposed by Åström and Wittenmark. Up to now, self-tuning controller has been developed and applied in industry, and the object systems have generally been a class of lumped-parameter systems. There are many systems which must be treated as distributed-parameter systems in real life; thermal conduction, the diffusion of air pollutant spues, the vilation of high buildings, the spread of seismic shok waves, and so on. The most difficult problem in the study of distributed-parameter systems is how to treat the infinit-dimensional spatial domain. Usually, we can treat distributed-parameter systems by using the methods of multivariable control theory functional analysis, or eigenfuction expansion. The optimal method must be selected according to the systems to be controlled. A self-tuning regulator for distributed-parameter systems habe been proposed by Hanza and Sheirah. In the present report we propose a new design method for a self-tuning controller for a distributed-parameter system based on eigenfucnction expansion. This distributed-parameter system has a few actuators fixed in the spatial domain. The unknown plant parameters are estimaed by a least-squares algorithm. In this report, we show a theoretical consideration. We will show the effectiveness of this control algorithm for the real temperature control system near future.

研究目的

最近のディジタル計算機の急速な進歩により，複雑な計算がマイクロコンピュータなどのディジタルコンピュータで容易に実行できるようになり，理論と応用のギャップがしばしば指適されていた制御理論も，このディジタルコンピュータの助けを借りて，実在のプラントへ応用され始めてきた。実在のプラント制御に対する制御性能の良否は，対象とするプラントのモデル化に大きく依存している。この依存性を軽減し，制御性能の劣化を防ぐ方法として，モデル化を逐次行いつつ，操作量を順次決定する適応制御の研究が活発に行われ，適用例からもその有効性が検証されている。特に，これまでの報告のほとんどは，制御対象が常微分方程式あるいは差分方程式で記述される集中定数系に対する構成法であった。ところが，温度制御システムや大気汚染質の推定問題，制御問題など実際のシステムを考慮すると，これらを集中定数系として取り扱うより，分布定数系として取り扱った方が，より制御対象の動特性を反映したモデル化を行うことができる。

分布定数系は，通常その動特性が偏微分方程式で表され，このような分布定数系を解析するためには，従来の集中定数系の理論を，そのまま適用することは不可能である。そこで本研究において，分布定数系に対し適応制御法手法の一つであるセルフチューニングコントローラーの一設計法について考察する。

研究経過

主として分布定数系におけるセルフチューニン

グコントローラー(STC)の設計に対する理論的研究を行った。これについては，次章で詳細に説明する。本研究で考察した分布定数系に対するSTCの実用性（恒温槽温度制御系への適用）の検討については，引き続き現在も考察中である。恒温槽温度制御系のハードウェアの構成については，第4章において示す。

研究成果

1. 記述モデル

ここでは，次式の放物型偏微分方程式で与えられる分布定数システムに対して考察を行う。

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t}=a\cdot q(t, x)+f(t, x)+w(t, x) \quad (1)$$

ただし，ここでは適応制御系の設計について考察するため，a は未知パラメータとする。また，$q(t, x)$, $f(t, x)$ および $w(t, x)$ は，分布定数システムにおける制御量，操作量および外乱を示し，

$$E[w(t, x)]=0,$$

$$E[w(t, x)\cdot w(s, y)]=W^2\delta(x-y)\delta(t-s) \quad (2)$$

である。さらに，x は，

$$x=\{x^1, x^2, \ldots, x^N\}\in D \quad (3)$$

で表され，D は r 次元のユークリッド空間 E^N の有界な領域で，その境界を ∂D とする。

次に，(1) 式における初期条件と境界条件を以下のように定義する。

［初期条件］ $q(0, x)=q_0(x) \quad (0\leqq x\leqq 1)$ (4)

［境界条件］ $q(t, 0)=q(t, 1)=0$ (5)

3.2 集中定数系近似

計算を簡易化するために，(1) 式をそのまま解くのではなく，固有値展開法を用いて集中定数系近似を行う。

(1) 式において，

$$a\frac{d^2\phi_i(x)}{dx}=-\lambda_i\cdot\phi_i(x),$$

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\ldots\leqq\lambda_i \quad (i\to\infty) \quad (6)$$

$$\left.\frac{d\phi_i(x)}{dx}\right|_{x=0,1}=0 \quad (i\to\infty) \quad (7)$$

$$\int_D\phi_i(x)\phi_i(x)dx=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$$

（完全正規直交系） (8)

を満足する固有値例 $\{\lambda_i\}$ および固有関数列 $\{\phi_i(x)\}$ が存在すると仮定する。ただし，δ_{ij} はクロネッカデルタである。(6) 式〜(8) 式で記述された固有値関数列 $\{\phi_i(x)\}$ を用いて，$q(t, x)$, $f(t,x)$ および，$w(t, x)$ をそれぞれ以下のように展開する。

$$q(t, x)=\sum_{i=1}^{N}q_i'(t)\cdot\phi_i(x) \quad (9)$$

$$f(t, x)=\sum_{i=1}^{N}f_i'(t)\cdot\phi_i(x) \quad (10)$$

$$w(t, x)=\sum_{i=1}^{N}w_i'(t)\cdot\phi_i(x) \quad (11)$$

(8) 式を用いると，(9) 式〜(11) 式の各係数 $q_i'(t)$, $f_i'(t)$ および $w_i'(t)$ は，それぞれ以下のように求められる。

$$q_i'(t)=\int_0^1 q(t, x)\cdot\phi_i(x)dx \quad (12)$$

$$f_i'(t)=\int_0^1 f(t, x)\cdot\phi_i(x)dx \quad (13)$$

$$w_i'(t)=\int_0^1 w(t, x)\cdot\phi_i(x)dx \quad (14)$$

(9) 式〜(11) 式を (1) 式に代入すると，

$$\frac{dq'(t)}{dt}=\Lambda'\cdot q'(t)+f'(t)+w'(t) \quad (15)$$

ただし，

$$q'(t)=[q_1'(t), q_2'(t), \ldots, q_N'(t)]^T \quad (16)$$

$$f(t)=[f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_N'(t)]^T \quad (17)$$

$$w'(t)=[w_1'(t), w_2'(t), \ldots, w_N'(t)]^T \quad (18)$$

$$\Lambda'=\mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \lambda_2\ldots, \lambda_N\} \quad (19)$$

となる。

3. STCの構成

制御目的は，制御量の分布 $(q(t, x))$ が，望ましい目標値分布（温度制御の場合，温度分布：$q^*(x)$）になるように操作量 $(f(t, x))$ を決定することである。つまり，ここでは，

$$J_D=E\left[\int_0^1(q(t, x)-q^*(x))^2dx\right] \quad (20)$$

で与えられる評価規範を最小化する最小分散制御に基づいたSTCについて考察する。このとき，$f(t, x)$ は

$$f(t, x)=\sum_{i=1}^{N}g_k(t)\cdot\delta(x-x^k) \quad (21)$$

ただし，

$$0 \leqq x^1 \leqq x^2 \leqq \ldots \leqq x^N \leqq 1 \tag{22}$$

として与えられ，実際には (20) 式を最小にするような重み係数 $g_i(t)$ を求めることが，制御目的である。

まず，固有関数列を用いると，$q^*(x)$ は

$$q^*(x)=\sum_{i=1}^{N} q_i^* \cdot \phi_i(x) \tag{23}$$

として与えられ，(12) 式および (21) 式より，(20) 式は

$$J_D=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(q_i'(t)-q_i^*)^2\right] \tag{24}$$

と書き換えられる。したがって，(24) 式を最小化するような $f_i'(t)$ を決定する問題に置き換えられる。

次に，マイコンを用いた実際の制御問題を考えるため，(15) 式をサンプリング間隔 T で離散化すると，次式を得る。

$$q(t+1)=\Lambda\cdot(q(t)+f(t)+w(t)) \tag{25}$$

ただし，

$$q(t)=[q_1(t), q_2(t), \ldots, q_N(t)]^T \tag{26}$$

$$f(t)=[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_N(t)]^T \tag{27}$$

$$w(t)=[w_1(t), w_2(t), \ldots, w_N(t)]^T \tag{28}$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{\exp(\lambda_1\cdot T), \exp(\lambda_2, T), \ldots, \exp(\lambda_N\cdot T)\} \tag{29}$$

であり，$q_i(t)=q_i'(T\cdot t)$, $f_i(t)=T\cdot f_i'(T\cdot t)$ および $w_i(t)=T\cdot w_i'(T\cdot t)$ である。

さらに，(23) 式の両辺から q^*を引くと，

$$q(t+1)-q^* =\Lambda\cdot(q(t)-\Lambda^{-1}\cdot q^*+f(t)+w(t)) \tag{30}$$

ここで，

$$q^*=[q_1^*, q_2^*, \ldots q_N^*]^T \tag{31}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} &E[(q(t+1)-q^*)\cdot(q(t+1)-q^*)] \\ &=E[(q(t)-\Lambda^{-1}\cdot q^*+f(t))^T \\ &\quad\times\Lambda^T\Lambda(q(t)-\Lambda^{-1}\cdot q^*+f(t))] \\ &\quad+E[w^T(t)\Lambda^T\Lambda w(t)] \end{aligned} \tag{32}$$

を得る。$w(t)$ が $q(t)$ および $f(t)$ に対し独立であるから，

$$q(t)=\Lambda^{-1}\cdot q^*+f(t) \tag{33}$$

のとき，(32) 式は最小となり，

$$\begin{aligned} &E[(q(t+1)-q^*)\cdot(q(t+1)-q^*)] \\ &=E[w^T(t)\Lambda^T\Lambda w(t)] \end{aligned} \tag{34}$$

となる。したがって，評価規範を最小にするような操作量 $f(t)$ は，(33) 式より

$$f(t)=\Lambda^{-1}\cdot q^*-q(t) \tag{35}$$

として与えられる。ここで，Λ は実際には未知パラメータであり，これを$\hat{\Lambda}$に置き換え，以下の逐次最小 2 乗法により計算する。

$$\hat{\Lambda}_i(t)=\hat{\Lambda}_i(t-1) +\frac{S_i(t-1)\gamma(t-1)}{1+\gamma^T(t-1)S_i(t-1)\gamma(t-1)}e_i(t) \tag{36}$$

$$S_i(t)=S_i(t-1) -\frac{S_i(t-1)\gamma^T(t-1)\gamma(t-1)S_i(t-1)}{1+\gamma^T(T-1)S_i(t-1)\gamma(t-1)} \tag{37}$$

$$e_i(t)=q_i(t)-\hat{\Lambda}_i(t-1)\gamma(t-1) \tag{38}$$

ただし，

$$\hat{\Lambda}(t)=[\hat{\Lambda}_1(t), \hat{\Lambda}_2(t), \ldots, \hat{\Lambda}_N(t)]^T \tag{39}$$

$$\hat{\Lambda}_i(t)=[0, \ldots, \exp(\hat{\lambda}_i(t)\cdot T), \ldots, 0]^T \tag{40}$$

$$\gamma(t)=[q_1(t)+f_1(t), q_2(t)+f_2(t), \ldots, q_N(t)+f_N(t)]^T \tag{41}$$

である。

4. 重み係数の決定

実際には，(21) 式の重み係数を求めなければならないため，ここでは，$g_i(t)$ の決定について考察する。(21) 式および (9)〜(11) 式から，

$$\begin{aligned} f(t, x)&=\sum_{i=1}^{N} g_i(t)\cdot\delta(x-x^i) \\ &=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\cdot\phi_i(x) \end{aligned} \tag{42}$$

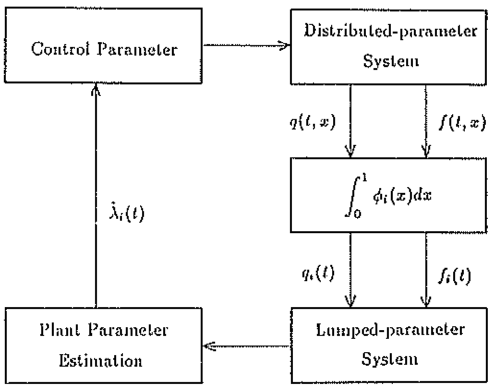

図 1. 分布定数系に対する STC ブロック線図

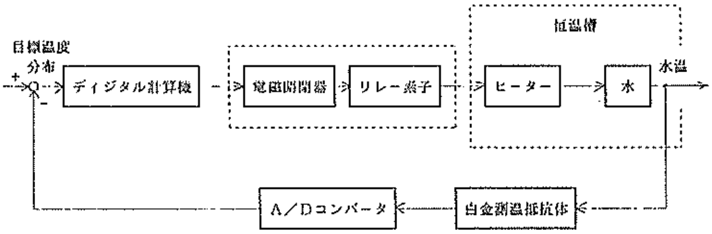

図 2.　恒温槽温度制御系のブロック線図

と書ける。ここで，$T=1$ としたため，$f(t)=f'(t)$ とした。この (42) 式は，空間領域 D 上での分布制御を意味しており，実用上は (21) 式のような N 点 $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ での離散制御となっていなければならない。したがって，

$$f_i(t)=\sum_{i=1}^{N} g_i(t)\cdot\phi_i(x^i) \tag{43}$$

となり次式を得る。

$$f(t)=g(t)\cdot\Phi \tag{44}$$

ここで，

$$g(t)=[g_1(t), g_2(t), \ldots, g_N(t)]^T \tag{45}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} \phi_1(x^1) & \phi_2(x^1) \ldots \phi_N(x^1) \\ \phi_1(x^2) & \phi_2(x^2) \ldots \phi_N(x^2) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \phi_1(x^N) & \phi_2(x^N) \ldots \phi_N(x^N) \end{bmatrix} \tag{46}$$

である。このとき，正規方程式として，次式が成立する。

$$g(t)=(\Phi^T\cdot\Phi)^{-1}\Phi^T f(t) \tag{47}$$

$$\Psi=(\Phi^T\cdot\Phi)^{-1}\Phi^T \tag{48}$$

いま，Ψ の第 (m, n)成分を Ψ_{mn}とすると，

$$g_i(t)=\sum_{j=1}^{N}\Psi_{ij}\cdot f_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{49}$$

となる。したがって，(35) 式および (49) 式より，

$$g_i(t)=\sum_{j=1}^{N}\Psi_{ij}(q_i^*-\Lambda_i(t)\cdot q_i(t)) \tag{50}$$

の関係によって求められる。以上の関係を図 1 に示す。

今後の課題と展望

時間的な制約から，上述の分布定数系に対するSTC の実用性についての考察が，残ってしまった。これについて，引続き研究を行っていく予定である。ここで考察する恒温槽温度制御系のハードウェアの概要を図 2 に示す。

さらに，分布定数系を集中定数近似しないで制御可能となる制御アルゴリズムについての考察も，今後の課題としたい。

謝　辞　本研究を遂行するに当たり，日頃熱心にご指導頂く徳島大学　大松　繁教授ならびに高松工業高等専門学校　石原弘一教授に感謝致します。

発 表 論 文

分布定数系に対する適応制御系の設計ではないが，適応制御系の設計として次の論文を発表した。

山本　透，石原弘一，大松　繁，北森俊行：モデルマッチング法に基づく離散時間 I-PD 型制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，27，899～906 (1991).